

Chapitre 30

Applications linéaires (partie B)

Plan du chapitre

1	L'anneau $\mathcal{L}(E)$	1
2	Endomorphismes remarquables de $\mathcal{L}(E)$	3
2.1	Homothéties	3
2.2	Projecteurs : définition, éléments caractéristiques	3
2.3	Caractérisation d'un projecteur	6
2.4	Symétries : définition, éléments caractéristiques	8
2.5	Caractérisation d'une symétrie	10
3	Formes linéaires et hyperplans	12
3.1	Formes linéaires (dimension quelconque)	12
3.2	Formes linéaires (dimension finie)	12
3.3	Hyperplans vectoriels (dimension quelconque)	14
3.4	Hyperplan (dimension finie)	15
4	Méthodes pour les exercices	18

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
 E est un $\mathbb{K}$ -e.v. ; F et G sont des **s.e.v.** de E

1 L'anneau $\mathcal{L}(E)$

On rappelle la propriété suivante :

Théorème 30.1

$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau (non commutatif si $E \neq \{0_E\}$).

Remarque. En fait, on peut même dire que $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre (non commutative si $E \neq \{0_E\}$).

Il est fréquent d'utiliser la notation multiplicative pour l'anneau $\mathcal{L}(E)$: la composée $f \circ g$ sera alors notée fg , et en particulier on notera $f^2 = f \circ f$, etc. En particulier :

- $f^0 := \text{id}_E$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n := \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si f est inversible, $f^{-n} := \underbrace{f^{-1} \circ f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}}_{n \text{ fois}}$
- Pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$: $(f^n)^{-1} = (f^{-1})^n = f^{-n}$ et $f^{n+m} = f^n \circ f^m$.



Lorsque $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on note typiquement f^2 la fonction $f \times f$, donc la fonction $x \mapsto f(x) \times f(x)$, par exemple $\cos^2$, $\sin^2$, etc. Or, pour $f \in \mathcal{L}(E)$, l'expression " $f(x) \times f(x)$ " n'a *a priori* aucun sens : $f(x)$ est un vecteur de E et la loi $\times$ n'est *a priori* pas définie sur E (c'est juste un e.v.). Ainsi, lorsque $f \in \mathcal{L}(E)$, il faut comprendre que f^2 représente $f \circ f$ et non $f \times f$.

Par ailleurs, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est bijective / un isomorphisme / un automorphisme
2. f admet une application réciproque (dans E^E) : il existe $g : E \rightarrow E$ tel que $g \circ f = f \circ g = \text{id}_E$
3. f est symétrisable pour $\circ$ dans $\mathcal{L}(E)$: il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = f \circ g = \text{id}_E$

Dans ce cas, on dira que f est inversible et on notera $f^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ sa réciproque.

Définition 30.2 – Groupe linéaire $GL(E)$

On note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E , dit groupe linéaire de E .

De manière équivalente, $GL(E)$ est donc l'ensemble des applications inversibles de l'anneau $\mathcal{L}(E)$.

Théorème 30.3

L'ensemble $GL(E)$ est un groupe pour la loi $\circ$.

Exemple 1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 - 2f - 3\text{id}_E = 0$. Montrer que $f \in GL(E)$ et déterminer f^{-1} .

Théorème 30.4 – Formules du binôme et $a^n - b^n$ (version $\mathcal{L}(E)$)

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

$$\boxed{f \circ g = g \circ f} \implies (f + g)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^k \circ g^{n-k}) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{n-k} g^k$$

$$\boxed{f \circ g = g \circ f} \implies f^n - g^n = (f - g) \circ \left[\sum_{k=0}^{n-1} (f^k \circ g^{n-k-1}) \right] = \left[\sum_{k=0}^{n-1} (f^k \circ g^{n-k-1}) \right] \circ (f - g)$$

2 Endomorphismes remarquables de $\mathcal{L}(E)$

2.1 Homothéties

Définition 30.5

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, λid_E est un endomorphisme de E appelé homothétie de rapport λ .

Théorème 30.6

$\lambda \text{id}_E \in GL(E)$ si et seulement si $\lambda \neq 0$, et dans ce cas $(\lambda \text{id}_E)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \text{id}_E$.

2.2 Projecteurs : définition, éléments caractéristiques

Rappel : si F et G sont supplémentaires dans E , on sait que pour tout $u \in E$, il existe un unique couple $(u_F, u_G) \in F \times G$ tel que $u = u_F + u_G$.

Définition 30.7 – Projecteur

On suppose que $E = F \oplus G$. On définit le projecteur sur F parallèlement à G comme étant l'application :

$$\begin{aligned} p : E &\rightarrow E \\ u &\mapsto u_F \quad (\text{avec } u = u_F + u_G) \end{aligned}$$

Les s.e.v. F et G sont appelés les éléments caractéristiques de p .

Remarque. Comme le montre la définition ci-dessus, p est entièrement déterminé par le choix des s.e.v. F et G . Cela justifie la dénomination “d’éléments caractéristiques” de p .

Méthode – Éléments caractéristiques → projecteur

Connaissant F et G , on peut trouver l'expression de $p(u)$ pour tout $u \in E$ en déterminant la décomposition de u en $u_F + u_G$.

Exemple 2. Déterminer l'expression du projecteur p sur $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$ parallèlement à l'ensemble $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x\}$. En déduire $p(0, 1)$.

Exemple 3.

- L'application nulle $0_{\mathcal{L}(E)}$ est un projecteur sur $\{0_E\}$ parallèlement à E .
- L'application identité id_E est un projecteur sur E parallèlement à $\{0_E\}$.

Théorème 30.8

On suppose que $E = F \oplus G$. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G .

1. p est linéaire, i.e. $p \in \mathcal{L}(E)$.

2. $G = \text{Ker } p$

3. $F = \text{Im } p = \boxed{\{u \in E \mid p(u) = u\}}$

Remarque. L'ensemble $\{u \in E \mid p(u) = u\}$ correspond exactement à $\text{Ker}(p - \text{id}_E)$:

Démonstration.

□

Méthode – Projecteur $\rightarrow$ Éléments caractéristiques

Pour trouver les éléments caractéristiques d'un projecteur p , il suffit donc de déterminer $\text{Ker } p$ et $\text{Im } p$.
Pour $\text{Im } p$, il est plus facile en général de déterminer $\text{Ker}(p - \text{id}_E)$, c'est-à-dire de résoudre $p(u) = u$.

Exemple 4. Soit $p : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'application définie par $p(A) = \frac{1}{2}(A + A^\top)$. On admet que p est un projecteur (et donc est linéaire). Déterminer ses éléments caractéristiques. On notera $0_{n,n}$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Corollaire 30.9

Si p est un projecteur, alors ses éléments caractéristiques sont $\text{Im } p$ et $\text{Ker } p$. Plus précisément, p est le projecteur sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$.
En particulier, $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$.

Deux pièges fréquents :



1. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, en général $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ ne sont pas supplémentaires. Si E est de dimension finie, par le théorème du rang, on a certes $\dim E = \dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f$, mais rien ne permet d'affirmer par exemple que $\text{Ker } f \cap \text{Im } f$ est réduit à $\{0_E\}$ ou que $\text{Ker } f + \text{Im } f$ est égal à E . Contre-exemple :
2. Quand bien même aurait-on $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$, cela ne suffit pas pour en déduire que f est un projecteur. Pour trouver un contre-exemple, on aura besoin de la caractérisation en section suivante.

2.3 Caractérisation d'un projecteur

Théorème 30.10

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.



Cette caractérisation n'est valide que si p est

Démonstration. **Sens direct** : on suppose que p est un projecteur. On note F et G ses éléments caractéristiques, de sorte que p soit le projecteur sur F parallèlement à G , avec $E = F \oplus G$.

Sens réciproque :

1.

2.

3.

□



Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$. Cela ne suffit pas à conclure que f est un projecteur. Contre-exemple :

2.4 Symétries : définition, éléments caractéristiques

Définition 30.11 – Symétrie

On suppose que $E = F \oplus G$. On définit la symétrie par rapport à F parallèlement à G comme étant l'application

$$\begin{aligned} s : E &\rightarrow E \\ u &\mapsto u_F - u_G \end{aligned}$$

Les s.e.v. F et G sont appelés les éléments caractéristiques de la symétrie s .

Remarque. Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

- Pour tout $u \in F$, on a $s(u) = \dots\dots$. Autrement dit $s|_F = \dots\dots\dots$
- Pour tout $u \in G$, on a $s(u) = \dots\dots$. Autrement dit $s|_G = \dots\dots\dots$

Méthode – Éléments caractéristiques $\rightarrow$ Symétrie

Connaissant F et G , on peut trouver l'expression de $s(u)$ pour tout $u \in E$ en déterminant la décomposition de u en $u_F + u_G$.

Exemple 5. Déterminer l'expression de la symétrie s par rapport à $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z\}$ parallèlement à $G = \text{Vect}(0, 0, 1)$. En déduire $s(0, 1, 0)$.

- Exemple 6.**
- L'application $-\text{id}_E$ est une symétrie par rapport à $\{0_E\}$ parallèlement à E
 - L'application id_E est une symétrie par rapport à E parallèlement à $\{0_E\}$.

Théorème 30.12

Soit F et G deux s.e.v. supplémentaires de E et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G . Alors :

- s est linéaire, i.e. $s \in \mathcal{L}(E)$.
- $F = \{u \in E \mid s(u) = u\}$
- $G = \{u \in E \mid s(u) = -u\}$

Remarque. En particulier, on a $F = \text{Ker}(s - \text{id}_E)$ et $G = \text{Ker}(s + \text{id}_E)$

Corollaire 30.13

Toute symétrie s est une symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$ et parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$.
En particulier, $E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$.

Pour une symétrie on a $\text{Im } s = E$ et $\text{Ker } s = \{0_E\}$. On verra en effet plus loin que s est bijective... Les images et noyau de s n'ont donc rien à voir avec les éléments caractéristiques de s .

**2.5 Caractérisation d'une symétrie****Théorème 30.14**

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. Alors s est une symétrie si et seulement si $s \circ s = \text{id}_E$.

Cette caractérisation n'est valide que si s est



Différemment, s est une symétrie si et seulement si s est une involution linéaire.

Corollaire 30.15

Toute symétrie s est un automorphisme, et de plus $s^{-1} = s$.

Preuve du Théorème 30.14. Sens direct :

Sens réciproque : soit $s \in \mathcal{L}(E)$ tel que $s \circ s = \text{id}_E$. On pose

$$F := \text{Ker}(s - \text{id}_E) = \{u \in E \mid s(u) = u\}$$

$$G := \text{Ker}(s + \text{id}_E) = \{u \in E \mid s(u) = -u\}$$

Montrons que F et G sont supplémentaires dans E , et que s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

- Montrons que $F \cap G = \{0_E\}$. Soit $u \in F \cap G$. On a alors

$$\begin{cases} (s - \text{id}_E)(u) = 0_E \\ (s + \text{id}_E)(u) = 0_E \end{cases} \quad \begin{cases} s(u) - u = 0_E \\ s(u) + u = 0_E \end{cases} \quad \begin{cases} s(u) = u \\ 2u = 0_E \end{cases} \quad L_2 - L_1$$

d'où $u = 0_E$. Ainsi, $F \cap G = \{0_E\}$ (l'autre inclusion est évidente).

- Montrons que $F + G = E$. Soit $u \in E$. On pose

$$u_F = \frac{1}{2}(u + s(u)) \quad \text{et} \quad u_G = \frac{1}{2}(u - s(u))$$

On a bien sûr $u = u_F + u_G$. De plus, on remarque alors que

$$\begin{aligned} s(u_F) &= \frac{1}{2}(s(u) + s^2(u)) \\ &= \frac{1}{2}(s(u) + u) \quad \text{car } s^2 = \text{id}_E \\ &= u_F \end{aligned}$$

donc $u_F \in F$. On peut montrer également que $s(u_G) = -u_G$, donc $u_G \in G$. Ainsi, $u \in F + G$. D'où $F + G = E$.

- Enfin, montrons que s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G . En effet, si $u = u_F + u_G$ avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$, on a par ce qui précède :

$$s(u) = s(u_F) + s(u_G) = u_F - u_G$$

Donc s est bien la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

□

Exemple 7. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} s : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (3x + 4z, -y, -2x - 3z) \end{aligned}$$

est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques.

3 Formes linéaires et hyperplans

3.1 Formes linéaires (dimension quelconque)

Définition 30.16 – Forme linéaire

On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

L'ensemble des formes linéaires sur E , i.e. $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, est noté E^* . Il est appelé espace dual de E .

En particulier, E^* est un $\mathbb{K}$ -e.v.

Exemple 8. L'application

$$\begin{aligned}\mathbb{K}^2 &\rightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\mapsto 2x + 3y\end{aligned}$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^2$, i.e. un élément de $(\mathbb{K}^2)^*$.

Exemple 9. Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, l'application $P \mapsto P(\alpha)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}[X]$.

Remarque. Si $\varphi \in E^*$, alors ou bien $\varphi = 0_{E^*}$, ou bien φ est surjective.

3.2 Formes linéaires (dimension finie)

Théorème 30.17

Si E est de dimension finie, alors E^* aussi et on a $\dim E^* = \dim E$.

Démonstration.

□

Par le Théorème 29.15 du chapitre précédent, pour déterminer entièrement une forme linéaire φ , il suffit de définir les valeurs des réels $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)$.

Définition 30.18

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe une unique forme linéaire notée $e_i^* : E \rightarrow \mathbb{K}$ qui vérifie :

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

La forme linéaire $e_i^* \in E^*$ est appelée forme coordonnée d'indice i selon la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$.

e_i^* est bien une forme linéaire (élément de E^*) alors que e_i est un vecteur de E .



Remarque. Si $u = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$ est un vecteur de E , alors pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$e_i^*(u) = e_i^*\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_i^*(e_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_{i,j} = \lambda_i$$

Autrement dit, $e_i^*(u)$ renvoie la coordonnée de u selon le vecteur e_i . D'où le nom de forme linéaire coordonnée.

Exemple 10. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors

$$e_1^* : (x, y, z) \mapsto x \quad e_2^* : (x, y, z) \mapsto y \quad e_3^* : (x, y, z) \mapsto z$$

Théorème 30.19

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* , appelée base duale de $(e_1, \dots, e_n)$.

Démonstration.

□

En particulier, toute forme linéaire $\varphi \in E^*$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des e_i^* :

$$\forall \varphi \in E^* \quad \exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R} \quad \varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*$$

Exemple 11. Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $\varphi(x, y, z) = 2x + 3y - 4z$. Alors en notant (e_1^*, e_2^*, e_3^*) la base duale de la base canonique, on a

$$\varphi = 2e_1^* + 3e_2^* - 4e_3^*$$

La base duale $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ dépend du choix de la base $(e_1, \dots, e_n)$. Chaque base sur E est associée à une (unique) base duale de E^* .



3.3 Hyperplans vectoriels (dimension quelconque)

Définition 30.20 – Hyperplan

On appelle hyperplan (vectoriel) de E tout s.e.v. H de E qui peut s'écrire $H = \text{Ker } \varphi$ avec φ une forme linéaire non nulle.

Dans ce cas, on dit que $\varphi(u) = 0$ est une équation de H .

- La forme linéaire φ n'est pas unique : si on pose $\psi = 2\varphi$, alors on a aussi $H = \text{Ker } \psi$ bien que $\psi \neq \varphi$.
- En particulier, un même hyperplan peut admettre plusieurs équations : l'équation $\varphi(u) = 0$ équivaut aussi à $\psi(u) = 0$.

Exemple 12. L'ensemble $H = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0, 1]) \mid \int_0^1 f = 0 \right\}$ est un hyperplan de $\mathcal{C}^0([0, 1])$: en effet, H est le noyau de la forme linéaire $\varphi : \mathcal{C}^0([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \int_0^1 f$. On vérifie facilement que φ est non nulle.

Théorème 30.21

Soit H_1 et H_2 deux hyperplans de E . On pose φ_1 et φ_2 des formes linéaires non nulles telles que $H_1 = \text{Ker } \varphi_1$ et $H_2 = \text{Ker } \varphi_2$. On a $H_1 = H_2$ si et seulement si φ_1 et φ_2 sont colinéaires.

Comme φ_1 et φ_2 sont non nulles, φ_1 et φ_2 sont colinéaires si et seulement si $\varphi_1 = \alpha \varphi_2$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$, si et seulement si $\varphi_2 = \beta \varphi_1$ avec $\beta \in \mathbb{K}$ (de plus les scalaires α et β peuvent même être supposés non nuls).

Théorème 30.22 – Caractérisation des hyperplans

Soit H un s.e.v. de E . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. H est un hyperplan de E .
2. Il existe un vecteur $u \in E$ non nul tel que $E = H \oplus \text{Vect}(u)$.

Comme $u \neq 0_E$, l'ensemble $\text{Vect}(u)$ est une droite vectorielle. En d'autres termes, un hyperplan est un s.e.v. dont il "manque" juste une dimension pour être égal à E tout entier.

Remarque. La preuve ci-dessous montre notamment qu'on peut prendre pour u tout vecteur qui n'est pas dans H , ou encore tout vecteur tel que $\varphi(u) \neq 0$.

Démonstration. On ne montrera que le sens direct.

□

Exemple 13. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Montrer que $H = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P'(\alpha) = 0\}$ est un hyperplan de E et déterminer une droite vectorielle supplémentaire.

3.4 Hyperplan (dimension finie)

Théorème 30.23

On suppose E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Alors H est un hyperplan de E si et seulement si $\dim H = n - 1$.

Démonstration.

□

Théorème 30.24 – Équation d'un hyperplan en dimension finie

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E , et pour tout vecteur u de E , on écrit sa décomposition sur la base $(e_1, \dots, e_n)$ comme étant $u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Pour tout hyperplan H de E , il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ **non tous nuls** tels que l'équation de H soit de la forme

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$$

Démonstration.

□

Remarque. Ainsi, H est un hyperplan si et seulement s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que

$$H = \{x \in E \mid \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0\}$$

où $x_1, \dots, x_n$ désignent les coordonnées de x dans une base donnée de E .

Exemple 14. Les ensembles suivants sont des hyperplans de $\mathbb{R}^n$ et en particulier sont de dimension $n - 1$:

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$$

$$H' = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 - 2x_2 + 3x_3 - \dots + (-1)^n x_n = 0\}$$

Exemple 15. Soit $P = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$ un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$. Alors les coordonnées de P selon la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ sont $(a_0, a_1, \dots, a_n)$. Ainsi, si H est un hyperplan de $\mathbb{K}_n[X]$, il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$H = \left\{ \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}_n[X] \mid \lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_n a_n = 0 \right\}$$

Remarque. L'équation d'un hyperplan dépend techniquement de la base $(e_1, \dots, e_n)$ de E choisie. Mais on prend en général la base canonique usuelle.

Le Théorème suivant affirme que l'équation d'un hyperplan n'est pas unique : plus spécifiquement elle est unique à constante multiplicative près.

Théorème 30.25

On suppose E de dimension finie $n \geq 1$.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)$ deux n -uplets de $\mathbb{K}^n$ non égaux à $0_{\mathbb{K}^n}$. Les hyperplans d'équations respectives (en considérant la même base de E)

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \lambda'_i x_i = 0$$

sont confondus si et seulement si les n -uplets $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)$ sont colinéaires.

Démonstration.

Soit H un hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$. On peut trouver une forme linéaire φ telle que $\varphi(e_1) = \lambda_1, \dots, \varphi(e_n) = \lambda_n$, auquel cas $H = \left\{ x \in E \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0 \right\} = \{x \in E \mid \varphi(x) = 0\} = \text{Ker } \varphi$ et de même l'hyperplan H' d'équation $\sum_{i=1}^n \lambda'_i x_i = 0$ peut être mis sous la forme $H' = \text{Ker } \psi$ avec $\lambda'_1 = \psi(e_1), \dots, \lambda'_n = \psi(e_n)$. Or, $H = H'$ si et seulement si φ et ψ sont colinéaires. D'où le résultat.

□

Théorème 30.26

On suppose E de dimension finie $n \geq 2$. Soit H_1 et H_2 deux hyperplans de E . Alors

$$\dim(H_1 \cap H_2) = \begin{cases} n-1 & \text{si } H_1 = H_2 \\ n-2 & \text{si } H_1 \neq H_2 \end{cases}$$

Plus généralement, si $m \in \mathbb{N}^*$ et $H_1, \dots, H_m$ sont des hyperplans de E , alors

$$\dim(H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_m) \geq n - m$$

Il n'y a pas toujours égalité, il se peut que l'intersection de m hyperplans (même distincts) n'abaisse pas de m le degré :

Théorème 30.27

On suppose E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F un s.e.v. de E de dimension $m < n$. Alors en posant $q = n - m \geq 1$, il existe q hyperplans $H_1, \dots, H_q$ de E tels que

$$F = \bigcap_{k=1}^q H_k$$

Exemple 16. Toute droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ peut se représenter par l'intersection de deux (hyper)plans vectoriels de $\mathbb{R}^2$ (non confondus).

Exemple 17. Quand on transforme le s.e.v. $D = \text{Vect}((1, 2, 3))$ sous la forme d'une équation par la méthode du pivot (cf Chapitre 26), on trouve

$$(x, y, z) \in \text{Vect}((1, 2, 3)) \text{ssi } \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad (x, y, z) = (\alpha, 2\alpha, 3\alpha)$$

$$\text{ssi le système suivant admet une solution : } \begin{cases} \alpha = x \\ 2\alpha = y \\ 3\alpha = z \end{cases}$$

$$\text{ssi } (\dots) \text{ssi } y = 2x \text{ et } z = 3x$$

Ainsi,

$$D = \text{Vect}((1, 2, 3)) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} y = 2x \\ z = 3x \end{cases} \right\}$$

La droite D peut donc s'écrire comme l'intersection d'un hyperplan d'équation $y = 2x$ et d'un autre d'équation $z = 3x$.

4 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour déterminer si une application f est un projecteur ou une symétrie, on vérifie qu'elle est linéaire et on calcule $f \circ f$.

Méthode

Pour déterminer les éléments caractéristiques F et G d'un projecteur p ou d'une symétrie s , on utilise les formes "équations" de F et de G .

Méthode

Pour déterminer l'expression d'un projecteur ou d'une symétrie en connaissant F et G , il faut déterminer la décomposition d'un vecteur u quelconque de E en $u_F + u_G$ avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$.